Тема 17
Формули за съкратено умножение

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(x-2y)^2 = x^2 - 2x(2y) + (2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$(2x^2-y)(2x^2+y) = (2x^2)^2 - y^2 = 4x^4 - y^2$

Самостоятелна работа върху минимума знания и умения

1. Представете като многочлен:
а) $(a+2)^2$; $(3+b)^2$; $(x+y)^2$;
б) $(x-2)^2$; $(3-y)^2$; $(x-y)^2$; $(y-x)^2$;
в) $(3a+2)^2$; $(3b-2)^2$;
г) $(x+1)(x-1)$; $(2-y)(2+y)$; $(x+y)(x-y)$;
д) $(2x+3)(2x-3)$; $(5-3y)(5+3y)$; $(-x+a)(x+a)$;
е) $-2(x-3)(x+3)$; $(-a-b)(a-b)$.

2. Извършете действията:
а) $(-a+3)^2$; $(-x-y)^2$;
б) $5(2x+1)^2$; $-3(4-x)^2$;
в) $4x+(x-2)^2$; $25x^2-(5x-2)^2$;
г) $(3x+5)^2+(3x-5)^2$; $(2x+1)^2+(1-2x)^2$;
д) $(3x+5)^2-2x(4,5x+7,5)$; $5x^2+(2-3x)(2+3x)$.

3. Разложете на множители:
а) a^2+2a+1; x^2+4x+4; $x^2+2xy+y^2$;
б) y^2-2y+1; b^2-4b+4; $9-6x+x^2$;
в) $x-4$; $9-y^2$; $a-49$; $25-z^2$;
г) $4y^2-20y+25$; $x^2+8xy+16y^2$; $4x^2-25$.

4. Представете като степен:
а) $(4x^2+4x+1)(2x+1)$; **б)** $(a^2-2ab+b^2)(a-b)$.

5. Намерете стойността на израза:
а) 57^2-54^2; **б)** $67^2-2.67.17+17^2$; **в)** $81^2+2.81.19+19^2$.

Контролна работа

Вариант 1

1. Представете в нормален вид:
а) $(2x-3y)^2$; $(a^2-4)^2$; $\left(m-\frac{1}{3}\right)^2$;
б) $(5x+7y)^2+x(y-2)-(-5x-7y)^2$.

2. Докажете тъждеството:
а) $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$; **б)** $(a-b)^2=(b-a)^2$.

3. Разложете на множители:
а) $(3x-5)^2-4$; **б)** $a^2+2ab+b^2-1$.

4. Намерете числената стойност на израза:
$(4y-9)^2-9y^2$ при $y=8$.

Вариант 2

1. Представете в нормален вид:
а) $(xy+7z)^2$; $\left(y+\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$;
б) $(3a-2b)^2-(2a-3b)-(2b-3a)^2$.

2. Докажете тъждеството:
а) $(2a+4)(a-2)+8=2a^2$;
б) $(2+x)(2-x)(4+x^2)+x^4=16$.

3. Разложете на множители:

а) $4x^2 - 25$; **б)** $1 - x^2 + 2xy - y^2$.

4. Пресметнете числената стойност на израза:

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} \quad \text{за } x = \frac{1}{2}.$$

Вариант 3

1. Представете в нормален вид:

а) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$; $(1+a^2)(1-a^2)$; $(2x-3y)(3y+2x)$;

б) $(x - y)^2 + 3(y - x)^2 + 8xy$.

2. Докажете тъждеството:

а) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$;

б) $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (xa + yb)^2 + (xb - ya)^2$.

3. Разложете на множители:

а) $9a^3 - 25a$; **б)** $1 - 36(x - 3y)^2$.

4. Намерете стойността на израза:

$$\frac{48x^2 - 9x^4 - 64}{8 - 3x^2} \quad \text{за } x = 1\frac{1}{3}.$$

Задачи за упражнение

1. Представете в нормален вид:

а) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$;

б) $(a^2 - 1)^2 - (a - 1)(a^2 + 1)(a + 1)$;

в) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$;

г) $(x + y)x - (x^2y + y^2x) : (-x) - 2xy$;

д) $(a + b + c)^2$, $(a + b - c)^2$, $(a - b - c)^2$;

е) $(a + b + c)(a + b - c)$, $(a + b + c)(a - b - c)$;

ж) $x^3(x + 4) - (x - 2)x(x + 2)(x + 4) - (2x + 4)^2$

и пресметнете $27.667^3.2005 - 1999.2001.2003.2005 - 4.2003^2$.

2. Разложете на множители:

а) $(x^2+4x+4)-x^2+6x-9$, $x^2-10x+25-9y^2$;

б) $3b^2-3-4(b-1)^2$, $-16+x^2-x+\frac{1}{4}$;

в) $16a^4-a^8$, x^4-x^2-2x-1;

г) x^2+6x-y^2-4y+5, $4x^2-12xy+9y^2-4x+6y$;

д) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$, x^4+2x^3-2x-1;

е) x^3+4x+3, $x^2-8x+15$, $x^2-15x+26$, $6x^2+5x-6$;

ж) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$;

з) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$,
$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$;

и) $x^2-y^2-4(x+y)$, $x^3-a^2x+bx^2-a^2b$;

к) $x^2-z^2-2xy+y^2$, $x^2+y^2-9z^2-2xy$;

л) $x(6-x)^2-(x-6)+(6-x)^3$;

м) $ab(a+b)+bc(b-c)-ca(c+a)$, $(x+1)(x+2)+3x+7$.

3. Намерете най-малката стойност на многочлена:

а) x^2+1, a^2-2a+2, x^2-4x-5;

б) x^2+x+1, x^4-4x+y^2+4, x^2+2x+z^2+2z+3,
$x^2+2xy+2y^2+2x+4y+3$;

в) $x^2-2xy+6y^2-14x-6y+72$, $6x^2+y^2+2xy-30x-10y+50$;

г) $x^2-10xy+29y^2-4y+5$.

4. Намерете стойността на израза:

а) $4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})-4x(x-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}$ за $x=\frac{3}{2}$;

б) $(2y+9)^2-y(4y+31)$ за $y=-16,2$;

в) $3(a-\frac{2}{3})^2-(2a-1)^2-\frac{1}{3}$ за $a=3$;

г) $(x+3)^2-(x-9)(x+9)$ за $x=-0,5$;

д) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, ако $a+b=2$ и $ab=-3$;

е) $a^3b+a^2b^2+ab^3$, ако $a+b=-2$ и $ab=3$.

5. Докажете, че многочленът:

а) $81x^2+54x+9$, y^4+2y^2+1;

б) $4a^2-12a+10$, $16b^2+40b+36$;

в) $x^2-2xy+6y^2-14-6y+72$

е положителен за всяка стойност на променливите.

6. Докажете тъждеството:

а) $5(x+y)^2-4x^2-4xy=(x+y)(x+5y)$;

б) $(x+5)^2+2(x+5)(7-x)+(x-7)^2=144$;

в) $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)=a^4+a^2b+b^4$;

г) $(a-6)^2+(a-3)^2+(a+7)^2+(a+8)^2=(a-5)^2+(a-4)^2+(a+6)^2+(a+9)^2$;

д) $2a^4+2b^4+2c^4+(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)=(a^2+b^2+c^2)^2$;

е) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$ и пресметнете

$$\frac{2^{17}+2^{16}+\ldots+2+1}{2^8+2^7+\ldots+2+1}.$$

7. Докажете, че ако:

а) $m^2-mn=6n^2$, то $m=-2n$ или $m=3n$;

б) $a+b+c=1$, то $a^2-b^2+ac-bc=a-b$;

в) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, то $a=b=c$;

г) $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$;

д) $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=4$, то $x^4+y^4+z^4=8$;

е) $x+y+z=3t$ и $x^2+y^2+z^2=3t^2$, то $x=y=z8$;

ж) $x+\frac{1}{x}$ е цяло число, то $x^2+\frac{1}{x^2}$ е цяло число.

8. Опростете израза:

а) $\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)^2}$; **б)** $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2-2ac}$;

в) $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{3(x^2+y^2)}$; **г)** $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{2y}$;

д) $\dfrac{x^3-7x^2+14x-8}{x-2}$; **е)** $\dfrac{x^4+x^3+6x^2+5x+5}{x^2+x+1}$.

9. Докажете, че:

а) $2001^{2002}+2001^{2001}$ се дели на 2002;

б) $60^{2002}-60^{2002}$ се дели на 59;

в) $-x^3+3x+2$ се дели на $x+1$;

г) $2a^3+3ab+2ba^2+3b^2+a+b$ се дели на $a+b$;

д) произведението на четири последователни числа, събрано с 1, е точен квадрат на цяло число;

е) ако m е цяло число, то 6 дели m^3-m;

ж) ако m е цяло число, то 30 дели m^5-m;

з) ако a и k са естествени числа, то $a^k+2a^{k+1}+a^{k+2}$ се дели на $(a+1)^2$.